

Aula nº 19

The Feynman
Lectures on Physics
volume II, pag. 14.1

Potencial Vetor (continuação)

1. Introdução

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(1.a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(Lei de Ampère)

(1.b)

Da Eq. (1.a)

podemos escrever

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(2.a)

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

(2.b)

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

(2.c)

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

(2.d)

Para checar se $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ satisfaz $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ basta calcular componente p/ componente (ver Eq. (2.b) - 2.d) se:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (3)$$

O ponto central é que podemos

escrever

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla} \lambda \quad (4)$$

tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_0 + \vec{\nabla} \lambda)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 \quad (5)$$

Conclusão:

Diferentes vetores potenciais, como por exemplo $\vec{A}_0$ e $\vec{A}_0 + \vec{\nabla} \lambda$, produzem o mesmo campo magnético!

2. Calibres

Uma condição adicional pode ser imposta sobre $\vec{A}$ (lembre que esse tipo de escolha arbitrária foi já usado p/o potencial elétrico $V(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$). O fato que o campo magnético

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$ não implique que $\vec{A}$ e $\vec{A}_0$ tenham o mesmo divergente. De fato

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \vec{\nabla}^2 \chi \quad (6)$$

Dependendo da escolha de χ , $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0$ pode ser qualquer coisa desde que a Eq. (6) seja satisfeita.

A pergunta é qual a escolha de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$? Na magnetostática, essa escolha é a mais simples possível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (7)$$

Isso significa que a definição completa de $\vec{A}$ é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (8.a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (8.b)$$

Exemplo

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (9.a)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad (9.b)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0 \quad (9.c)$$

As possíveis soluções das equações:

$$(i) \quad A_y = x B_0, \quad A_x = 0, \quad A_z = 0$$

$$(ii) \quad A_x = -y B_0, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0$$

$$(iii) \quad A_x = -\frac{1}{2} y B_0, \quad A_y = \frac{1}{2} x B_0, \quad A_z = 0$$

Para o ultimo caso

6

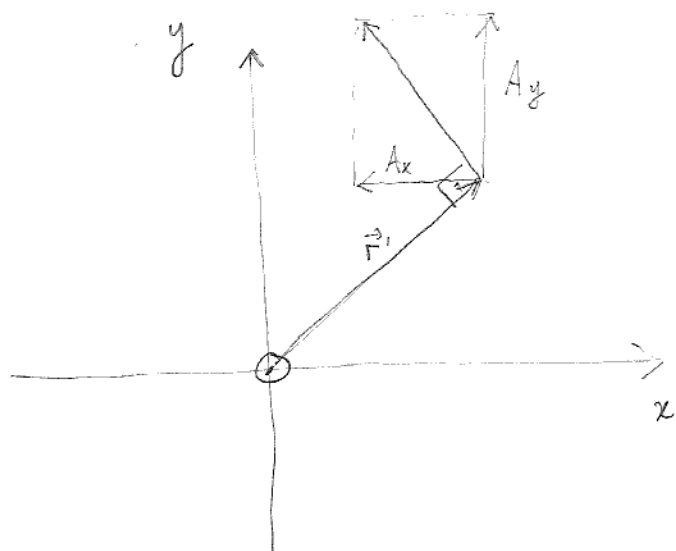


Fig. 1

$$|\vec{A}| = \frac{1}{2} B_0 \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} B_0 r'$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}'$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & B_0 \\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} y B_0 \hat{x} + \frac{1}{2} x B_0 \hat{y}$$

Então se $\vec{B}$ é um campo axial dentro de um solenoide, $\vec{A}$ circula na mesma direção da corrente

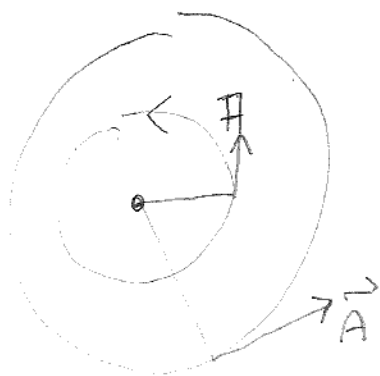


Fig. 2

Exemplo 1

Griffiths página 237

Encontre o potencial vetor dentro de um solenoide com n espiras por unidade de comprimento, raio R e corrente I

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \int \vec{B} \cdot \underline{d\vec{a}} = \Phi$$

Φ é o fluxo de $\vec{B}$ através do loop

Em breje da lei de Ampere $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$. Em princípio poderíamos aplicar a mesma "tecnologia" da lei de Ampere para

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \Phi$$

Num solenoide $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$ dentro do
 $= 0$ fora do

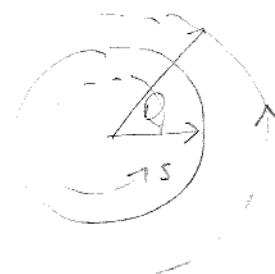
solenoide

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = A 2\pi s = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 n I (\pi s^2)$$

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{n I}{2} s \hat{\phi} \quad (s < R)$$

Para um loop fora do solenoide $s > R$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 n I (\pi R^2)$$



$$\vec{A} = \mu_0 \frac{n I}{2} \frac{R^2}{s} \hat{\phi} \quad (s > R)$$

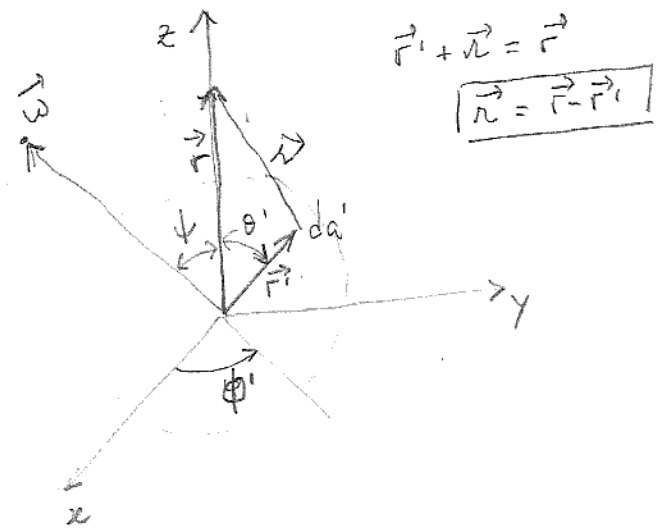
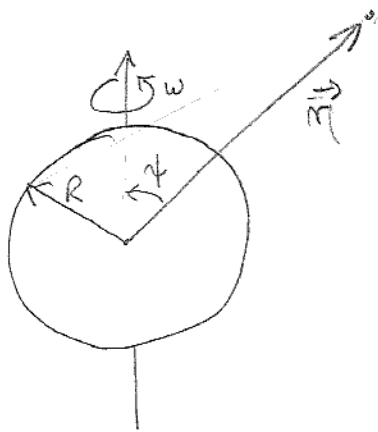
G. F. Leal Ferreira

Olhar: Revista Brasileira de Física, vol 26, p. 359-363

"Como o potencial vetor pode ser interpretado para revelar
 analogias entre grandezas magnéticas e elétricas" (2004)

Exemplo

Casca esférica c/ raio R e carga superficial σ e' cobrada girando com velocidade angular ω . Encontre o potencial vetorial no. pto $\vec{r}$ (ver figura)



$\vec{\omega}$ esta no plano xy

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{r} da'$$

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

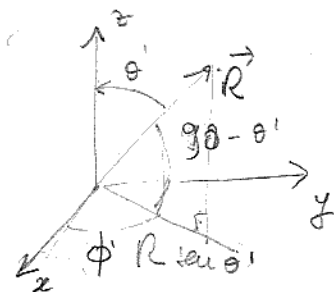
$$r = \sqrt{(\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{R})} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}$$

$$da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$0 \leq \phi' \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta' \leq \pi$$

$\vec{w}$ está no plano $xz \Rightarrow w_z = w \cos \psi$
 $w_x = w \sin \psi$



$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ w \sin \psi & 0 & w \cos \psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$

$$\cos(90 - \theta') = \sin \theta'$$

$$\sin(90 - \theta') = \cos \theta'$$

$$= R w \left[-\sin \psi \sin \theta' \sin \phi' \hat{x} + (\sin \psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \psi \cos \theta') \hat{y} + \sin \psi \sin \theta' \cos \phi' \hat{z} \right]$$

Agora $\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$

então

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \times \sigma \omega R^3 \times \sin \psi \times \underbrace{2\pi}_{\text{integral da parte radial}} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} \hat{y}$$

↓
integral em $d\phi'$

fazendo $u = \cos \theta'$

$$du = -\sin \theta' d\theta'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{2} R^3 \sigma \omega \sin \theta' * \int_{-1}^{+1} \frac{u du}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}}$$

integrar os
limites de
u de -1 a +1
e depois
multiplicar
por du

Procurar integrais da forma (página 61)

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{b+ax}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} * \sqrt{ax+b}$$

$$b = R^2 + r^2$$

$$a = -2Rr$$

logo

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u du}{\sqrt{R^2 + r^2 + (-2Rr)u}} = \frac{2[-2Rru - 2(R^2 + r^2)]}{3 \cdot 4R^2r^2} * \sqrt{R^2 + r^2 + (-2Rr)u} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= - \frac{[R^2 + r^2 + Rru]}{3R^2r^2} * \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u \, du}{\sqrt{R^2 + r^2 - (2Rr)u}} =$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr) \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr} - (R^2 + r^2 - Rr) \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr} \right]$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr) |R - r| - (R^2 + r^2 - Rr) (R + r) \right]$$

Se $\sqrt{\frac{R}{r}}$ dentro da esfera $R > r$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u \, du}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} = -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr) (R - r) - (R^2 + r^2 - Rr) (R + r) \right]$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[\begin{aligned} & (R^2 + r^2) R + R^2 r - (R^2 + r^2) r - R r^2 \\ & - (R^2 + r^2) R + R^2 r - (R^2 + r^2) r + R r^2 \end{aligned} \right]$$

$$= -\frac{2}{3R^2 r^2} (R^2 r - R^2 r - r^3) = + \frac{2r}{3R^2}$$

se $\vec{r}$ está fora da esfera

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u du}{R^2 + r^2 - 2Rru} = -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[-(R^2 + r^2 + Rr)(R-r) - (R^2 + r^2 - Rr)(R+r) \right]$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[\begin{aligned} &-(R^2 + r^2)R - \cancel{R^2 r} + \cancel{(R^2 + r^2)r} + Rr^2 \\ &-(R^2 + r^2)R + \cancel{R^2 r} - \cancel{(R^2 + r^2)r} + Rr^2 \end{aligned} \right]$$

$$= -\frac{2}{3R^2 r^2} \left[-R^3 - \cancel{r^2 R} + \cancel{R r^2} \right]$$

$$= + \frac{2R}{3r^2}$$

Agora como $\vec{\omega} \times \vec{r} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix}$$

$$= -\omega r \cos \psi \hat{y}$$

então

$$A(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2} R^2 \sigma \omega \sin \psi \times \frac{2r}{3R} \hat{y} = +\frac{\mu_0 R}{3} \sigma (-r \omega \sin \psi) \hat{y} & R > r \\ -\frac{\mu_0}{2} R^3 \sigma \omega \sin \psi \times \frac{2R}{3r^2} = +\frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (-r \omega \sin \psi) \hat{y} & r > R \end{cases}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R}{3} \sigma (\vec{\omega} \times \vec{r}) & , R > r \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\vec{\omega} \times \vec{r}) & , R < r \end{cases}$$

Calcular o campo magnético !

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

↓
coordenadas cilíndricas